9. Manual de Usuario del Identificador Gráfico de Bifurcaciones

El Identificador Gráfico de Bifurcaciones IGB es una herramienta que permite localizar valores críticos de parámetros independientes en sistemas dinámicos autónomos multiparamétricos continuos y discretos. En su análisis gráfico (método indirecto), el IGB utiliza dos estrategias: simulación y continuación. Para la localización exacta del valor crítico y tipo de bifurcación (método directo) el IGB utiliza funciones de prueba.

El IGB se ha desarrollado como un *toolbox* para MATLAB. En la actualidad existen dos versiones: IGB 4 para MATLAB 4.x, e IGB 5 para MATLAB 5.x la cual incorpora las ventajas propias de su plataforma operativa y mejor presentación gráfica.

Este Manual de Usuario presenta la interfaz del IGB mediante la cual se pueden ejecutar las funciones del *toolbox*. Esta es la forma más rápida y sencilla de operar el IGB. En el Manual de Referencia se exponen las funciones y la forma de ejecutarlas directamente a mano. El Manual de Usuario del IGB trata los siguientes temas:

Preparación	En la preparación se describen los requerimientos del sistema, el procedimiento de instalación y el contenido del IGB.
Interfaz	En esta sección se presenta el contenido del la interfaz gráfica del IGB: menús, variables, gráfica y botones de comando.
Ejemplos	Se presenta un ejemplo de aplicación para un sistema dinámico continuo y otro para uno discreto.

9.1 Preparación

A continuación se describen los requerimientos del sistema, el procedimiento de instalación y el contenido del IGB.

9.1.1 Requerimientos del sistema

Como se sabe, el IGB es un programa que corre bajo MATLAB, así que como requisito básico el PC debe tener instalada una versión de MATLAB: 4.x para IGB 4, o MATLAB 5.x para IGB 5.

El IGB es un programa que ocupa menos de 1MB en disco duro. Durante su ejecución puede generar archivos de texto donde consigna los valores de los puntos que se grafican que pueden superar los 3 MB.

9.1.2 Instalación

1. Copie el contenido del disco de instalación en la carpeta donde tiene instalado Matlab. En IGB versión 4 para Matlab 4.x se crearán los siguientes directorios:

   ```
   C:\MATLAB\IGB40
   C:\MATLAB\IGB40\IGBCOM
   C:\MATLAB\IGB40\IGBFUN
   C:\MATLAB\IGB40\USUARIO
   C:\MATLAB\IGB40\EJEMPLOS
   ```

   En la versión 4 para Matlab 5.x, se crearán los siguientes directorios:

   ```
   C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\IGB50
   C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\IGB50\IGBCOM
   C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\IGB50\IGBFUN
   C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\IGB50\USUARIO
   C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\IGB50\EJEMPLOS
   ```

2. A continuación debe adicionar al `PATH` de MATLAB los directorios de IGB. Para MATLAB 4.x, debe editar el archivo `MATLABCR.M` ubicado en el directorio del programa (`C:\MATLAB`). Ubique la línea que dice

   ```
   matlabpath([...
   ```

   y a continuación agregue estos tres renglones:

```
';c:\matlab\igb40',...
';c:\matlab\igb40\igbcom',...
';c:\matlab\igb40\igbfun',...
';c:\matlab\igb40\usuario',...
';c:\matlab\igb40\ejemplos',...
```

Otro procedimiento es la edición o creación del archivo `STARTUP.M` del directorio `/MATLAB/TOOLBOX/LOCAL`, al cual se le pueden agregar las siguientes líneas,

```
igbpath=['C:\MATLAB\igb40',...
     ';C:\MATLAB\igb40\igbcom',...
     ';C:\MATLAB\igb40\igbfun',...
     ';C:\MATLAB\igb40\usuario',...
     ';C:\MATLAB\igb40\ejemplos'];
path(igbpath,path);
```

Para MATLAB 5.x puede editar el archivo `STARTUP.M` adicionando las líneas

```
addpath('C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\igb50',...
   'C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\igb50\igbcom',...
   'C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\igb50\igbfun',...
   'C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\igb50\usuario',...
   'C:\ARCHIVOS DE PROGRAMA\MATLAB\igb50\ejemplos');
```

La próxima vez que inicie MATLAB, podrá utilizar el IGB.

9.1.3 Contenido del programa

La carpeta del IGB, denominada IGB40 para en la versión 4 e IGB50 en la versión 5, contiene todas las subcarpetas, funciones, comandos y archivos del *toolbox*. Los archivos del IGB se encuentran distribuidos en cuatros subcarpetas: `IGBFUN` para las funciones, `IGBCOM` para los comandos, `EJEMPLOS` donde hay funciones de ejemplo, y `USUARIO` donde están las plantillas de los archivos que puede modificar el usuario. A continuación se expone el contenido de cada una de las carpetas del IGB.

\MATLAB\IGBXX	
CONTENTS	Archivo con la información sobre el contenido del IGB
FILELIST	Archivo de texto con el contenido del IGB
ABOUT	Archivo de texto con la información sobre el IGB About
CONTACT	Archivo de texto con los datos de los creadores del IGB
GETPROFL	Librería necesaria para la ejecución del editor de texto dentro de IGB (en IGB 4)

\IGBFUN	Carpeta con las funciones del IGB
\IGBCOM	Carpeta con los comandos del IGB
\USUARIO	Carpeta con los archivos del usuario
\EJEMPLOS	Carpeta con archivo de ejemplo

\MATLAB\IGBXX\IGBFUN	
CONTENTS	Archivo con la información sobre las funciones del IGB
NEWTON	Método de Newton para la localización de equilibrios
NEWTONMP	Método de Newton para la localización de equilibrios en sistemas multiparamétricos
SECANT	Método secante para la localización de equilibrios
SECANTMP	Método secante para la localización de equilibrios en sistemas multiparamétricos
SEIDEL	Método de Seidel para la localización de puntos fijos
SEIDELMP	Método de Seidel para la localización de puntos fijos en sistemas multiparamétricos
BOLZANO	Método de bisección de Bolzano para la localización de equilibrios
FBRUTA	Identificación de bifurcaciones por fuerza bruta
XVST	Gráfica decomportamiento contra el tiempo (en IGB 5)
PUNI	Continuación con corrector Newton – Raphson para sistemas continuos
PUNID	Continuación con corrector Newton – Raphson para sistemas discretos
PMUL	Corrector Newton – Raphson a partir de varios puntos en sistemas continuos
PMULD	Corrector Newton – Raphson a partir de varios puntos en sistemas discretos
PSECANT	Continuación con corrector Secante para sistemas continuos
PSECANTD	Continuación con corrector Secante para sistemas discretos
PSEIDEL	Continuación con corrector Seidel para sistemas discretos
CSC	Continuacion con predictor secante para sistemas continuos
CSCD	Continuacion con predictor secante para sistemas discretos
CSCP	Continuacion con predictor secante para sistemas continuos parametrizados
CSCPD	Continuacion con predictor secante para sistemas discretos parametrizados
CTC	Continuacion con predictor tangente para sistemas continuos
CTCD	Continuacion con predictor tangente para sistemas discretos
CTCP	Continuacion con predictor tangente para sistemas continuos parametrizados
CTCPD	Continuacion con predictor tangente para sistemas discretos parametrizados

\MATLAB\IGBXX\IGBCOM	
CONTENTS	Archivo con la información sobre las funciones del IGB
IGB	Comando para el inicio de la interfaz del IGB
IGNEW	Creación de un archivo IGB nuevo
IGCLOSE	Permite salir del IGB (en IGB 4)
IGFOLD	Preparación de la interfaz para el ejemplo de bifurcación FOLD continua
IGHOPF	Preparación de la interfaz para el ejemplo de bifurcación FLIP
IGFOLDD	Preparación de la interfaz para el ejemplo de bifurcación FOLD discreta
IGFLIP	Preparación de la interfaz para el ejemplo de bifurcación FLIP
IGSACKER	Preparación de la interfaz para el ejemplo de bifurcación NEIMARK-SACKER
IGCON	Preparación de la interfaz para la ejecución de un sistema continuo
IGDIS	Preparación de la interfaz para la ejecución de un sistema discreto
IGRFASE	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función RFASE
IGXVST	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función XVST (en IGB 5)
IGDBIF	Preparación de la interfaz para la ejecución de un diagrama de bifuración/simulación
IGSPLOT	Crea o modifica la gráfica de acuerdo a los parámetros dados por el usuario
IGVIEW2D	Visualiza gráfica en 2D
IGVIEW3D	Visualiza gráfica en 3D
IGGRIDOF	Oculta la grilla de la gráfica
IGGRIDON	Muestra la grilla de la gráfica

IGHOLDOF	Permite la opción HOLD OFF de la gráfica
IGHOLDON	Permite la opción HOLD ON de la gráfica
IGGINPUT	Obtención de las coordenadas de un punto haciendo clic sobre la gráfica
IGSIMULA	Comando para iniciar el ploteo
IGSTOP	Detiene el ploteo y registro de datos
IGFBRUTA	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función FBRUTA
IGPUNI	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función PUNI
IGPMUL	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función PMUL
IGSECANT	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función PSECANT
IGSEIDEL	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función PSEIDEL
IGCSC	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función CSC-CSCD
IGCSCP	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función CSCP-CSCPD
IGCTC	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función CTC-CTCD
IGCTCP	Preparación de la interfaz para la ejecución de la función CTCP-CTCPD
IGTFUN	Prepara la interfaz para el uso de función de prueba
IGABOUT	Muestra el Help About IGB
IGHELP	Muestra la Ayuda en línea del IGB
FEDIT	Función interna para la edición de archivos

\MATLAB\IGBXX\EJEMPLOS	
CONTENTS	Archivo con la información sobre las ejemplos del IGB
FOLD	Forma normal de la bifurcación fold continua
FOLDJ	Jacobiano de la función FOLD
FOLDP	Parametrización de la función FOLD
FOLDJP	Jacobiano de la función FOLDP
FOLDD	Forma normal de la bifurcación fold discreta
FOLDJD	Jacobiano de la función FOLDD
HOPF	Forma normal de la bifurcación de Hopf
HOPFJ	Jacobiano de la función HOPF
HOPFP	Parametrización de la función HOPF
HOPFJP	Jacobiano de HOPFP
FLIP	Forma normal de la bifurcación flip en formato de función continua
FLIPJ	Jacobiano de la función FLIP
FLIPP	Parametrización de la función FLIP
FLIPJP	Jacobiano de la función FLIPP
FLIPD	Forma normal de la bifurcación flip
FLIPJD	Jacobiano de la función FLIPD
SACKER	Forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker en formato continuo
SACKERJ	Jacobiano de la función SACKER
SACKERP	Parametrización de la función SACKER
SACKERJP	Jacobiano de la función SAKCERP
SACKERD	Forma normal de la bifurcación de Neimark-Sacker
SACKERJD	Jacobiano de la función SACKERD
LOGISTIC	Función logística (discreta)
ROBERT	Función de Robertson o variación de la logística (discreta)
RICKER	Función de Ricker (discreta) en formato de función continua
RICKERJ	Jacobiano de la función RICKER
FORK	Forma normal de la bifurcación fork en formato de función continua
FORKJ	Jacobiano de la función FORK
ADAMS1	Función de Adams (continua)
ADAMSJ	Jacobiano de la función de Adams
BIF1	Comando para graficar la bifurcación fold

BIF2	Comando para graficar la bifurcación fork
BIF3	Comando para graficar la bifurcación de Neimark-Sacker
HOPFEX	Función para trazar círculos. Requerida por BIF3
LORENZ	Función de Lorenz
LORENZA	Simula la función de Lorenz
TEST1	Función de muestra expuesta en el informe
TEST1J	Jacobiano de la función TEST1
TEST2	Función de muestra expuesta en el informe
TEST3	Función de muestra expuesta en el informe

NOTA: Constantamente se realizan pruebas sobre el IGB y se adicionan a esta carpeta nuevos ejemplos

\MATLAB\IGBXX\USUARIO	
CONTENTS	Archivo con la información sobre las plantillas del IGB
TFUN	Función de prueba para bifurcaciones en sistemas continuos
TFUND	Función de prueba para bifurcaciones en sistemas discretos
FUN	Plantilla para la función del sistema continuo
GRADFUN	Plantilla para el Jacobiano de la función del sistema continuo
FUNP	Plantilla para la función parametrizada del sistema continuo
GRADFUNP	Plantilla para el Jacobiano de la función parametrizada del sistema continuo
FUND	Plantilla para la función del sistema discreto
GRADFUND	Plantilla para el Jacobiano de la función del sistema discreto

9.2 Interfaz

La interfaz del IGB, ha sido diseñada de tal forma que el usuario pueda configurar el sistema para su estudio en una sola pantalla. Todas las variables que el IGB necesita para su ejecución, pueden ser configuradas desde la interfaz.

En las versiones 4 y 5 de IGB, la interfaz tiene la misma disposición y las herramientas implementadas para la identificación de bifurcaciones son las mismas. En este sentido las dos versiones son iguales y la única diferencia es la versión de MATLAB para la cual fueron desarrolladas.

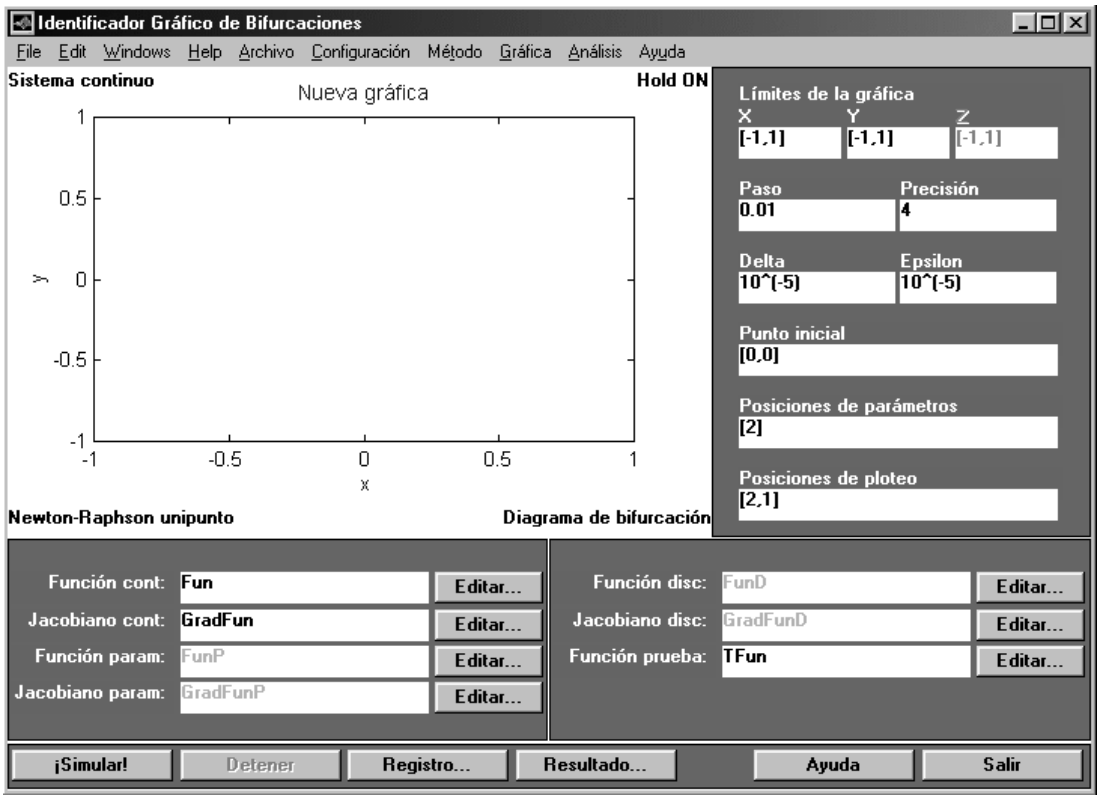

Figura 9.1 – Interfaz del IGB

La interfaz de IGB está constituida por los siguientes elementos:

- Menús
- Gráfica
- Variables IGB externas tipo vector
- Variables IGB externas tipo función
- Botones de comando

Información sobre todas las variables IGB puede encontrarse en el capítulo 7 del informe.

9.3 Menús

Los menús permiten configurar las variables IGB internas, que son las que controlan la ejecución de las funciones. Cada cambio realizado en las opciones de los menús, se refleja sobre la interfaz. Los menús del IGB son:

- Archivo
- Configuración
- Método
- Gráfica
- Análisis
- Ayuda

Los menús File, Edit, Window y Help pertenecen a MATLAB.

9.3.1 Menú Archivo

El menú archivo permite manejar las opciones relacionadas con el entorno del IGB.

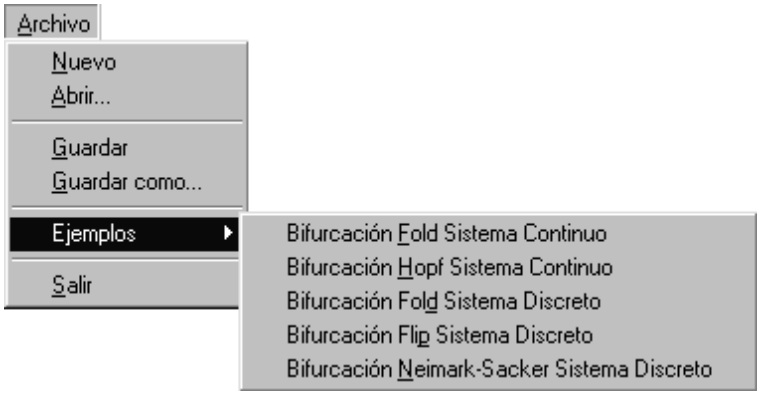

Figura 9.2 – Menú Archivo

En la actualidad es posible cargar una archivo que pueda ser leído por IGB 4. Este contiene las opciones de configuración seleccionadas por el usuario. En las dos versiones de IGB es posible cargar archivos de ejemplo desde el menú Archivo.

En este mismo menú se encuentran las opciones de Nuevo, con la que se carga las opciones por defecto consignadas en el archivo `IGNEW.M`. Del mismo modo se puede acceder al comando con el cual se cierra la aplicación, desde la opción salir. Los comandos IGB de cada una de estas opciones son:

Opción del Menú Archivo	Comando IGB
Nuevo	IGNEW
Abrir...	IGOPEN(*)
Guardar	IGSAVE(*)
Guardar como...	IGSAVEAS(*)
Bifurcación Fold Sistema Continuo	IGFOLD
Bifurcación Hopf Sistema Continuo	IGHOPF
Bifurcación Flip Sistema Discreto	IGFLIP
Bifurcación Fold Sistema Discreto	IGFOLDD
Bifurcación Neimark-Sacker Sistema Discreto	IGSACKER
Salir	IGCLOSE

(*) Disponible en IGB v4

9.3.2 Menú Configuración

El menú configuración permite seleccionar el tipo de sistema que se va a analizar (continuo o discreto) y el tipo de análisis o salida (retrato de fase o diagrama de bifurcación).

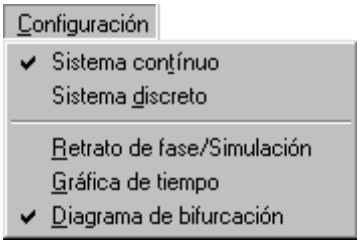

Figura 9.3 – Menú Configuración

Con la opción de Retrato de fase/Simulación se puede seleccionar los valores de los parámetros del sistema y visualizar su comportamiento en el tiempo. Esta opción es conveniente cuando el comportamiento del sistema es desconocido y se desea establecer los valores de los parámetros para la detección de sus bifurcaciones. Con esta opción se utiliza la función RFASE descrita en el Manual de Referencia.

Gráfica de tiempo muestra el comportamiento del sistema dinámico autónomo continuo o discreto en el tiempo. En el caso de los sistemas discretos no se hace necesario definir un paso de tiempo, ya que cada unidad de tiempo es definida por los estados del sistema.

Para los sistemas continuos se define la unidad de paso del tiempo Δt, y a partir de un punto inicial, se calcula el siguiente así usando la aproximación $\Delta x = \Delta t \cdot f(x)$.

La opción de Diagrama de bifurcación permite la utilización de varios métodos para la detección e identificación de bifurcaciones. Los comandos IGB de cada una de estas opciones son:

Opción del Menú Archivo	Comando IGB
Sistema continuo	`IGCON`
Sistema discreto	`IGDIS`
Retrato de fase/Simulación	`IGRFASE`
Gráfica de tiempo	`IGXVST`
Diagrama de bifurcación	`IGDBIF`

9.3.3 Menú Método

El menú Método se activa cuando se selecciona la opción Diagrama de bifurcación del menú Configuración. En este menú se puede seleccionar el método para el análisis del sistema dinámico. Los comandos de este menú ejecutan las funciones descritas en el Manual de Referencia.

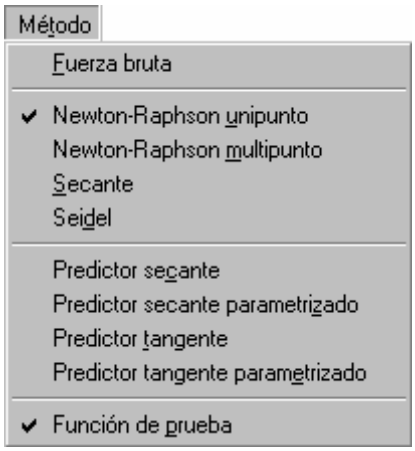

Figura 9.4 – Menú Método

Los comandos y funciones IGB que se utilizan en cada una de estas opciones son:

Opción del Menú Archivo	Comando IGB	Función IGB
Fuerza bruta	IGFBRUTA	FBRUTA
Newton-Raphson unipunto	IGPUNI	PUNI/PUNID
Newton-Raphson multipunto	IGPMUL	PMUL/PMULD
Secante	IGSECANT	SECANT/SECANTD
Seidel	IGSEIDEL	SEIDEL
Predictor secante	IGCSC	CSC/CSCD
Predictor secante parametrizado	IGCSCP	CSCP/CSCPD
Predictor tangente	IGCTC	CTC/CTCD
Predictor tangente parametrizado	IGCTCP	CTCP/CTCDT
Función de prueba	IGTFUN	TFUN/TFUND

La labor de los comandos IGB ejecutados es la de preparar la interfaz para guiar al usuario en el empleo de las funciones creadas para el análisis de los sistemas.

9.3.4 Menú Gráfica

El menú gráfica permite configurar su presentación. La opción Nueva gráfica, permite limpiar la gráfica actual y genera una nueva. La opción Vista permite visualizar la gráfica en 2 y 3 dimensiones. Grid muestra u oculta la grilla y Hold permite activar las opciones de `hold on` y `hold off` para graficar borrando o sin borrar los datos previamente graficados.

Figura 9.5 – Menú Gráfica

Los comando IGB utilizados por estas opciones son:

Opción del Menú Gráfica	Comando IGB
Nueva gráfica	IGSPLOT
Vista [2D/3D]	IGVIEW2D/3D
Grid [on/off]	IGGIRDON/OFF
Hold [on/off]	IGHOLDON/OFF

9.3.5 Menú Análisis

Las opciones de este menú permiten iniciar o detener el análisis y ver el registro de datos y los resultados referentes a las bifurcaciones encontradas.

Figura 9.6 – Menú Análisis

Cada uno de los puntos calculados durante el análisis del sistema dinámico se grafica y se registra en el archivo `REGISTRO.TXT`. Del mismo modo, cuando se utiliza el método directo de la función de prueba para la identificación de las bifurcaciones y una bifurcación es encontrada, este dato se consigna en el archivo `RESULTAD.TXT`. Los comandos y funciones IGB utilizadas por las opciones de este menú son:

Opción del Menú Análisis	Comando - Función IGB
¡Simular!	`IGSIMULA`
Detener	`IGSTOP`
Registro...	`FEDIT`
Resultado...	`FEDIT`

9.3.6 Menú Ayuda

En este menú se encuentran la Ayuda en línea de cada función IGB utiliza por los métodos para el análisis del sistema, y la información Acerca de la versión IGB.

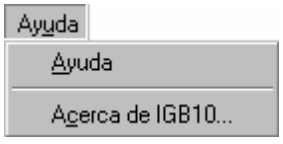

Figura 9.7 – Menú Ayuda

En la versión 4 (y anteriores) la ayuda en línea se muestra dentro de la ventana principal de MATLAB. A partir de la versión 4, esta ayuda aparece en una ventana.

9.4 Gráfica

En la gráfica del IGB se visualiza en tiempo real el progreso en el desarrollo de los métodos para el análisis del sistema dinámico. Cada punto calculado es graficado y registrado en el archivo de registro.

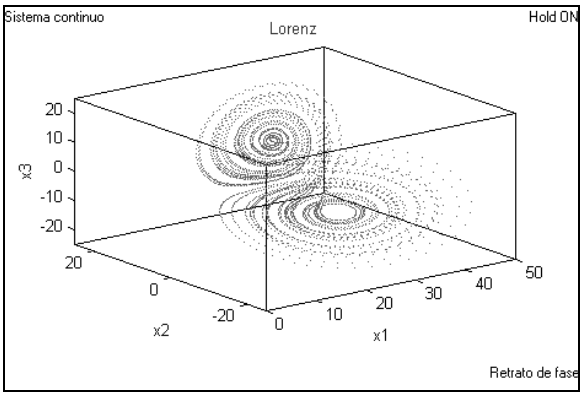

Figura 9.8 – Simulación en el IGB

Del mismo modo, la gráfica muestra la información acerca de:

- Tipo de sistema (discreto o continuo) seleccionado en el menú Configuración.
- Tipo de análisis (diagrama de bifurcación o retrato de fase) seleccionado en el menú Configuración.
- Método utilizado para el análisis seleccionada en el menú Método.
- Estado sobre el repintado de la gráfica de la opción Hold del menú Gráfica.

9.5 Variables externas IGB

Tal como se explicó en el capítulo 7, el IGB maneja dos tipo de variables: internas y externas. Las variables por lo general se modifican con las opciones del menú. Las

variables externas aparecen ante el usuario en el IGB y el usuario puede configurarlas a su acomodo.

Dentro de las variables externas se pueden distinguir dos tipos: vector y función. Las variables tipo vector como lo dice su nombre son vectores (o números). Las de tipo función pues son funciones, o en realidad nombres de funciones. Las primeras su localizan a la izquierda de la gráfica, y las segundas debajo de esta. Ver Figura 9.1.

9.5.1 Variables IGB externas tipo vector

Estas variables configuran las entradas numéricas de las funciones del IGB. De acuerdo al tipo de función seleccionada en el menú, aparecen las variables involucradas en el análisis.

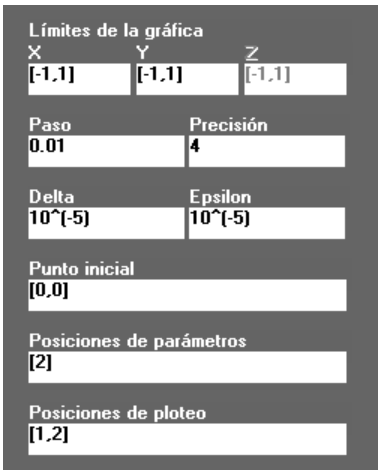

Figura 9.9 – Variables externas tipo vector

Las variables IGB externas tipo vector son:

Variables IGB externas tipo vector	Símbolo
Límites de la gráfica Tamaño de paso Precisión Medidas de convergencia	PLIM S PREC DELTA / EPSILON
Número de iteraciones totales e iniciales	ITTOT / ITINI
Tolerancia	TOL
Posición de los parámetros independientes	PPAR
Posición de las variables de ploteo	PPLT

9.5.2 Variables IGB externas tipo función

Las variables IGB externas tipo función son, como su nombre lo sugiere, funciones para la descripción de la función, necesarias para la ejecución de las funciones del IGB. Estas funciones son modificables. Para esto IGB ha implementado botones de comando que permite utilizar el editor de texto configurado en MATLAB para abrir los archivos referenciados.

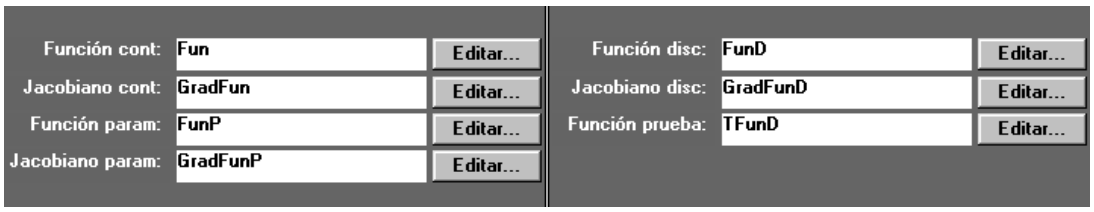

Figura 9.10 – Variables externas tipo función

No es requisito utilizar esta opción para la edición de los archivos, pero si es requisito que el nombre de la función aparezca en los cuadros de texto cuyo tono de letra es negro. Cuando el tono de la letra es gris significa que ese archivo no es necesario para le ejecución de la función.

En algunas funciones del IGB, la presencia de algún archivo que aparece como requerido (en letras negras) puede ser opcional. Para saber cuando puede no suministrarse un archivo opcional, debe consultarse la ayuda en línea del IGB o la ayuda del IGB en MATLAB. Así mismo, toda la información acerca de las funciones se encuentra analizada en el capítulo 7 y recopilada en el Manual de Referencia.

Las variables IGB externas tipo función y sus plantillas para la creación o edición son:

Variables IGB externas tipo función	Plantilla

Función continua
Jacobiano de la función continua
Función continua parametrizada
Jacobiano de la función parametrizada
	`FUN`
	`GRADFUN`
	`FUNP`
	`GRADFUNP`

Función discreta	`FUND`
Jacobiano de la función discreta	`GRADFUND`

9.6 Botones de comando

Los botones de comando tienen como función facilitar la ejecución de las funciones de análisis y las que se consideran de más utilidad para el usuario.

Existen siete botones de comando en las versiones 4 y 4 del IGB, cada uno de los cuales utiliza algún comando o función de IGB.

Botón de comando	Comando - Función IGB
¡Simular!	IGSIMULA
Detener	IGSTOP
Registro...	FEDIT
Resultado...	FEDIT
Ayuda	IGHELP
Salir	IGCLOSE
Editar...	FEDIT

9.7 Ejemplos

A continuación se describen dos ejemplos en los que se usa algunas de opciones del IGB ver. 4 para la identificación de bifurcaciones en un sistema dinámicos continuo y uno discreto. Para el primero se expone como ejemplo el análisis de la función que describe la forma normal de la bifurcación de Hopf el cual se encuentra implementado dentro de los ejemplos del IGB.

En el caso del sistema discreto, se ha hecho un análisis sobre la función logística en que tiene un comportamiento caótico caracterizado por la aparición de continuas bifurcaciones flip.

9.7.1 Sistema dinámico continuo

La *bifurcación de Hopf*, es la bifurcación asociada con la aparición de dos valores propio complejos conjugados $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$, con $\omega_0 > 0$. Tal como se ha visto en el capítulo 3, la forma normal de esta bifurcación está descrita por,

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$$
$$\dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$$

El primer análisis sobre este sistema dinámico continuo, es la construcción de su retrato de fase mediante simulación. Para esto se selecciona del menú Configuración del IGB, la opción Retrato de fase/Simulación.

Esta opción nos exige la definición del sistema dinámico continuo a simular. Se crea así un archivo `HOPF.M` con las descripción de la función, y se coloca el nombre `HOPF` en el como variable IGB de función continua.

```
function yp=hopf(y)
x1=y(1); x2=y(2); alfa=y(3);
yp=[alfa*x1-x2-x1*(x1^2+x2^2);
    x1+alfa*x2-x2*(x1^1+x2^2)];
```

A partir de distintos puntos iniciales y variando el valor del parámetro, puede simularse el comportamiento del sistema así,

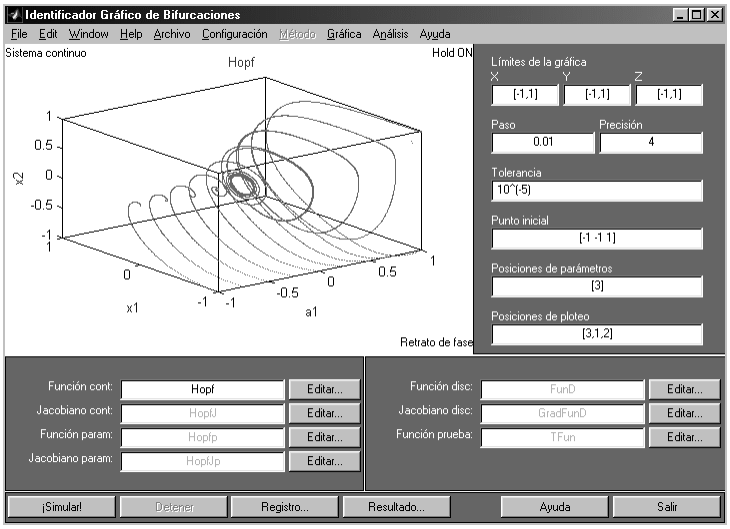

Figura 9.11 – Retrato de fase 3D en el IGB

Del mismo modo pueden realizarse distintos retratos de fase en 2D, variando en cada uno el valor del parámetro y los puntos iniciales. Estos puntos iniciales pueden ser seleccionados con el mouse utilizando la opción Punto inicial del menú Gráfica.

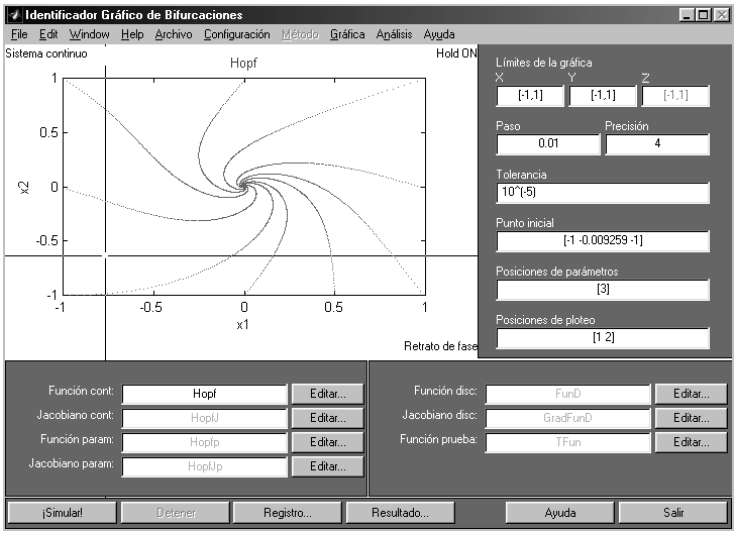

Figura 9.12 – Retrato de fase 2D en el IGB

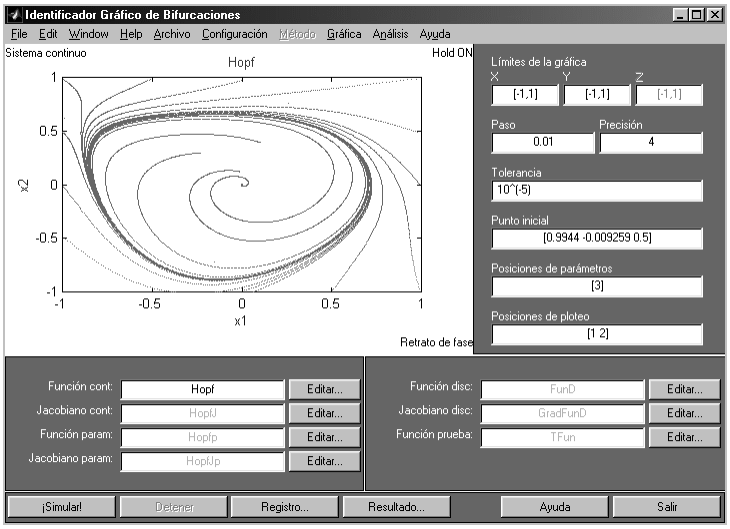

Figura 9.13 – Retrato de fase 2D en el IGB

En las dos figuras anteriores se obtuvieron los retratos de fase para valores de parámetro independiente menor y mayor a cero. La presencia de la bifurcación se puede comprobar con alguno de los métodos de continuación, por ejemplo el método de continuación con

parametrización. Para esto se debe seleccionar la opción Diagrama de Bifurcación de menú Configuración y luego la opción Predictor secante del menú Método.

Este método nos exige la definición del Jacobiano de la función continua ya que el corrector se basa en el método de Newton-Raphson multiparamétrico.

$$J=\begin{bmatrix} \alpha-3x_1^2-x_2^2 & -1-2x_1x_2 \\ 1+2x_1x_2 & \alpha-x_1^2-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

Este Jacobiano se define en el archivo `HOPFJ.M` de la siguiente manera,

```
function [J,ValPr,Z]=hopfj(y)
x1=y(1); x2=y(2); alfa=y(3);
J=[alfa-3*x1^2-x2^2, -1-2*x1*x2;
   1-2*x1*x2,        alfa-x1^2-3*x2^2];
ValPr=eig(J);
Z=[x1,x2]';
```

La vista en 3D de la gráfica ayudará a visualizar la aparición de la bifurcación.

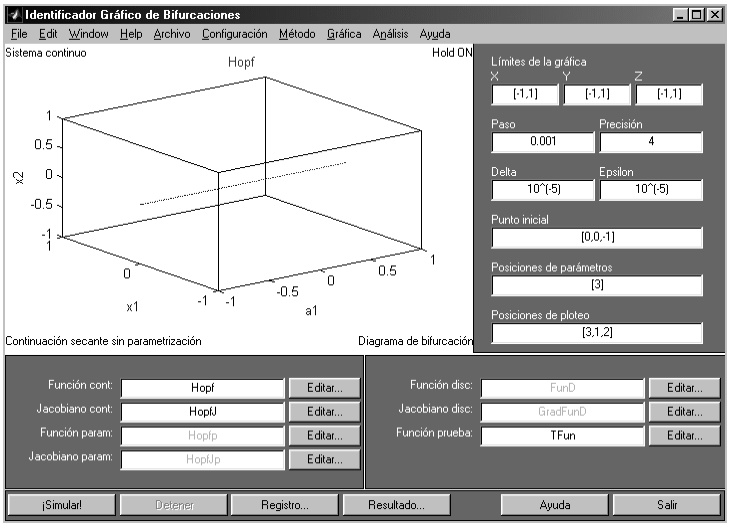

Figura 9.14 – Continuación 3D en el IGB

Como se observa en la figura, se ha utilizado como la función de prueba descrita en el archivo `TFUN.M`, que identifica bifurcaciones de codimensión 1 en sistemas dinámicos continuos. De esta forma se consigue identificar directamente el tipo de bifurcación presente en este sistema. Para ver el resultado basta con hacer clic sobre el botón Resultado.

```
IDENTIFICADOR GRAFICO DE BIFURCACIONES
ver 4

ARCHIVO DE RESULTADOS
25-May-2000

Método: Predictor Secante Continuo
Archivo de la función: Hopf
Archivo del Jacobiano: HopfJ
Archivo de la función de prueba: TFun

Punto inicial Y0=[0;0;-1]
Posiciones de los parámetros=3

BIFURCACIONES ENCONTRADAS

Bifurcación HOPF entre los equilibrios
Y=[0;0;-0.01537] e-valor=[-0.01537+i*1;-0.01537-i*1]
Y=[0;0;0.001948] e-valor=[0.001948+i*1;0.001948-i*1]
```

Se puede comprobar que el sistema tiene un equilibrio en el punto $y =$ [0 0 0], cuyo valor propio, al ser evaluado en el Jacobiano, es $\lambda^2 = -1$, es decir, $\lambda = \pm i$. Lo cual coincide con el resultado arrojado por IGB.

9.7.2 Sistema dinámico discreto

Considérese la ecuación logística definida por

$$x_{k+1} = 4\alpha x_k(1-x_k)$$

descrita en el archivo `LOGD.M` como:

```
function yp=logd(y)
x=y(1); alfa=y(2);
yp=4*alfa*x*(1-x);
```

En un primer análisis que puede hacerse sobre este sistema dinámico discreto es la generación de un diagrama de bifurcación con el método de la fuerza bruta. Para esto se seleccionan las opciones de Sistema discreto y Diagrama de bifurcación del menú Configuración; luego se selecciona el método de Fuerza bruta del menú Método. En el campo de texto de la variable IGB Función Discreta, se escribe el nombre del archivo `logd`. Después de configurar el tamaño de paso y la gráfica, el resultado es el siguiente.

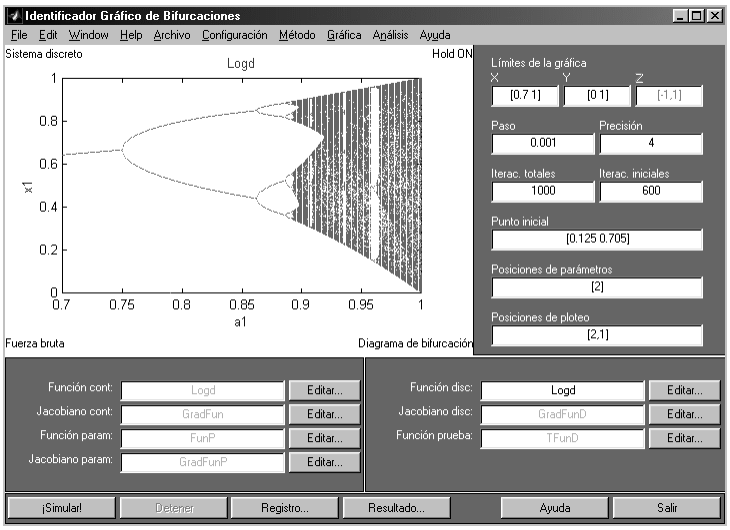

Figura 9.15 – Método de la fuerza bruta en el IGB

El punto inicial para este sistema debe asegurar un valor para la variable distinto de cero, ya que en este caso siempre se encontrarían puntos fijos para cualquier valor del parámetro. Cabe anotar que todos los puntos graficados son registrados en el archivo `registro.m` que puede ser editado haciendo clic sobre el botón Registro. Para estas condiciones, el archivo generado tiene un tamaño de 2.1MB.

Para identificar las bifurcaciones presentes en el sistema se puede hacer un paneo por todo el espacio graficado utilizando el método de Newton-Raphson multipunto, que permite identificar todas los puntos fijos (estables e inestables) a partir de múltiples condiciones iniciales. De esta manera se deben definir tres funciones más. La primera es el Jacobiano de la función discreta $J(x, \alpha)$.

$$J(x, \alpha) = 4\alpha - 8\alpha x$$

Así mismo se define la función continua $f(x, \alpha)$, y su Jacobiano $J(x, \alpha)$ necesarios para la implementación del método de Newton-Rapshon multiparamétrico.

$$f(x, \alpha) = 4\alpha x - 4\alpha x 2 - x$$
$$J(x, \alpha) = 4\alpha - 8\alpha x - 1$$

Estas funciones son definidas en los archivos `LOGDJ.M`, `LOGC.M`, `LOGCJ.M` del siguiente modo,

```
function [J,ValPr]=logdj(y)
x=y(1); alfa=y(2);
J=4*alfa-8*x*alfa;
ValPr=eig(J);


function yp=logc(y)
x=y(1); alfa=y(2);
yp=4*alfa*x-4*alfa*x^2-x;


function [J,ValPr,Z]=logcj(y)
x=y(1); alfa=y(2);
J=4*alfa-8*x*alfa-1;
ValPr=eig(J);
Z=4*x-4*x^2;
```

El resultado es la identificación de todos los puntos fijos del sistema en el espacio graficado.

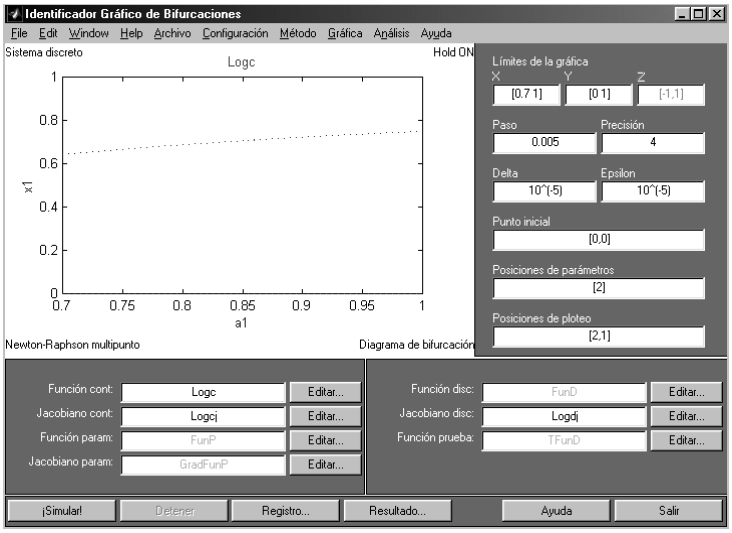

Figura 9.16 – Método del disparo múltiple en el IGB

Tal como se esperaba, a lo largo del sistema se encuentra un ramal de equilibrios que sufre un cambio de estable a inestable. Aunque el parámetro del sistema dinámico tiene múltiples valores críticos y bifurcaciones de doblamiento de periodo, solo hay un ramal identificable por el método de Newton-Raphson multiparamétrico.

Para identificar de que tipo de bifurcación se trata y el valor crítico del parámetro, se utiliza un método de continuación y una función de prueba. Se escogerá el método de continuación con predictor secante y la función de prueba `TFUND`.

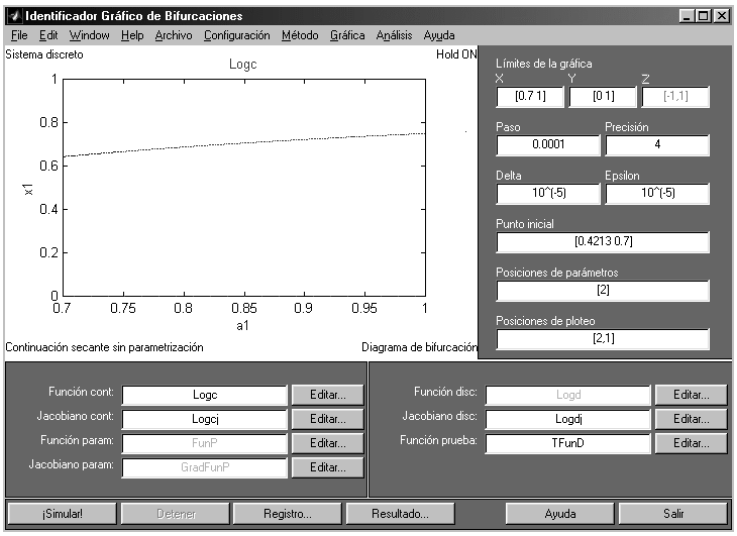

Figura 9.17 – Continuación 2D en el IGB

Los resultados, consignados en el archivo `RESULTAD.TXT` son,

```
IDENTIFICADOR GRAFICO DE BIFURCACIONES
ver 4

ARCHIVO DE RESULTADOS
25-May-2000

Método: Predictor Secante Discreto
Archivo de la función: Logc
Archivo del Jacobiano: Logcj
Archivo del Jacobiano: Logdj
Archivo de la función de prueba: TFunD

Punto inicial Y0=[0.4213;0.7]
Posiciones de los parámetros=2

BIFURCACIONES ENCONTRADAS

Bifurcación FLIP entre los puntos fijos
Y=[0.6661;0.7488] e-valor=-0.9953
Y=[0.6667;0.7501] e-valor=-1
```

El valor crítico de la bifurcación podría precisarse disminuyendo el tamaño de paso tanto como se desee. Por ejemplo, con un tamaño de paso de 10^{-5}, el valor crítico del parámetro independiente se encuentra entre

```
Y=[0.6666;0.7499] e-valor=-0.9998
Y=[0.6667;0.7501] e-valor=-1
```

Este valor puede ser comprobado analíticamente determinando el punto en el que el multiplicador característico del punto fijo tiene norma de 1. Como se aprecia de la ecuación del sistema discreto, además de la solución trivial x=0, se encuentra un punto fijo siempre que

$$x = 1 - \frac{1}{4\alpha}$$

lo cual es válido siempre que α > 0.25. El multiplicador característico de este punto fijo, evaluado en el Jacobiano de la función discreta, es

$$J(x) = 2 - 4\alpha.$$

De esta forma x se vuelve un punto fijo inestable cuando $\alpha = \frac{3}{4}$. El otro valor posible para α, sería $\alpha = \frac{1}{4}$, pero así x no podría definirse. De tal forma que el punto de bifurcación es con toda exactitud,

$$y = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \text{ e-valor} = -1$$

Lo cual implicaría la aparición de una bifurcación *flip*, que coincide con el resultado arrojado por IGB.